

Spis treści

Przedmowa	3
1 Element skończony. Przestrzeń elementów skończonych. Baza.	9
1.1 Element skończony i jego własności.	9
1.2 Przestrzeń elementów skończonych.	10
1.3 Baza przestrzeni elementów skończonych.	12
1.4 Przykłady.	14
1.5 Ćwiczenia.	19
2 Elementy skończone i ich przestrzenie konstruowane na sympleksach.	21
2.1 n -sympleks i współrzędne barycentryczne.	21
2.2 Przestrzeń wielomianów $P_m(K)$	23
2.3 Twierdzenie o interpolacji w $\mathbb{R}^1$	23
2.4 Elementy typu L_1	24
2.5 Trójkąt Argyrisa.	24
2.6 Przestrzenie konstruowane na sympleksach.	28
2.7 Inne przykłady elementów skończonych konstruowanych na sympleksach.	30
2.8 Ćwiczenia.	33
3 Elementy skończone i ich przestrzenie konstruowane na kostkach.	34
3.1 Przestrzeń wielomianów $Q_m(K)$	34
3.2 Iloczyn tensorowy przestrzeni liniowych skończenie wymiarowych funkcji.	34
3.3 Elementy typu Q_1	35
3.4 Prostokąt Bognera-Foxa-Schmita.	36
3.5 Przestrzenie konstruowane na kostkach.	37
3.6 Inne przykłady elementów konstruowanych na kostkach.	40
3.7 Ćwiczenia.	41
4 Interpolacja w przestrzeni elementów skończonych.	43
4.1 Interpolacja naturalna na elemencie.	43

4.2	Interpolacja naturalna w przestrzeni elementów skończonych.	45
4.3	Inne interpolacje w przestrzeni elementów skończonych.	46
5	Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami z przestrzeni elementów skończonych.	49
5.1	Zadanie aproksymacji w przestrzeni Hilberta.	49
5.2	Aproksymacja średniokwadratowa ciągła.	50
5.3	Uwagi o uwarunkowaniu i rozwiązywaniu układów równań normalnych oraz o całkowaniu numerycznym.	56
6	Pochodna uogólniona. Przestrzeń Sobolewa i pewne jej własności.	58
6.1	Pochodna uogólniona.	58
6.2	Przestrzeń Sobolewa.	61
6.3	Nierówność Friedrichsa. Równoważność normy i seminormy w przestrzeniach $H_0^m(\Omega)$	62
6.4	Wartości funkcji na brzegu obszaru. Operacja śladu.	63
6.5	Formuły Greena w przestrzeniach Sobolewa.	67
6.6	Twierdzenie Sobolewa o zanurzeniu.	68
6.7	Twierdzenia o zawieraniu przestrzeni elementów skończonych w przestrzeniach Sobolewa.	68
7	Zadanie wariacyjne i zadanie przybliżone. Ogólne oszacowanie błędu.	70
7.1	Zadanie wariacyjne. Twierdzenie Laxa-Milgrama.	70
7.2	Zadanie przybliżone.	71
7.3	Rozwiązanie zadania wariacyjnego a poszukiwanie minimum pewnego funkcyjonału.	73
8	Przykłady zadań Laxa-Milgrama w przestrzeniach Sobolewa.	74
8.1	Zagadnienie brzegowe Dirichleta dla równania zwyczajnego rzędu drugiego.	74
8.2	Zagadnienie brzegowe Neumanna dla równania zwyczajnego rzędu drugiego.	79
8.3	Zagadnienie brzegowe Dirichleta dla równania eliptycznego rzędu drugiego w $\mathbb{R}^2$	80
8.4	Zagadnienie brzegowe Neumanna dla równania eliptycznego rzędu drugiego w $\mathbb{R}^2$	83
8.5	Zagadnienie brzegowe dla równania biharmonicznego w $\mathbb{R}^2$	85
9	Metoda elementów skończonych dla zagadnień eliptycznych.	88
9.1	Sposoby generowania układów równań liniowych.	88

9.2	Metoda elementów skończonych dla zagadnień brzegowych zwyczajnych rzędu drugiego z zastosowaniem elementów liniowych.	91
9.3	Metoda elementów skończonych dla zagadnień brzegowych zwyczajnych rzędu drugiego z zastosowaniem elementów kubicznych.	95
9.4	Metoda elementów skończonych dla zagadnień brzegowych dla równań eliptycznych rzędu drugiego w $\mathbb{R}^2$ z zastosowaniem elementów liniowych.	99
9.5	Uwagi o uwarunkowaniu i rozwiązywaniu układów równań wynikających z MES oraz o całkowaniu numerycznym.	107
10	Oszacowanie błędu metody elementów skończonych.	109
10.1	Elementy afinicznie równoważne. Błąd interpolacji dla elementów afinicznie równoważnych.	109
10.2	Regularne rodziny pokryć. Rodzina przestrzeni afinicznych elementów skończonych. Błąd interpolacji w przestrzeni elementów skończonych.	112
10.3	Oszacowanie błędu metody elementów skończonych dla zadań eliptycznych.	116
11	Metoda elementów skończonych dla zadań niestacjonarnych.	118
11.1	Zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania parabolicznego.	118
11.2	Zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania hiperbolicznego.	121
	Bibliografia	123