

SPIS TREŚCI

Przedmowa	11
Rozdział I. Teoria płyt Kirchhoffa	13
1. Założenia i podstawowe zależności	13
1.1. Podstawowe założenia	13
1.2. Stan przemieszczenia i odkształcenia	14
1.3. Stan naprężenia i izotropowe związki fizyczne	15
1.4. Wyznaczenie składowych wektora naprężenia ścinającego	16
2. Lokalne równania równowagi i uogólnione siły wewnętrzne	17
2.1. Momenty i siły poprzeczne	17
2.2. Równania równowagi płyty	19
2.3. Siły i momenty wewnętrzne w funkcji pochodnych ugięcia płyty	20
3. Równanie przemieszczeniowe Germain-Lagrange'a	21
4. Zastępcze siły Kirchhoffa	22
5. Zagadnienia brzegowe teorii płyt	24
6. Płyty spoczywające na sprężystym podłożu	26
7. Wyprowadzenie podstawowych równań teorii płyt anizotropowych	27
7.1. Płyty ortotropowe	27
7.2. Płyty anizotropowe oraz przypadki szczególne, płyty ortotropowe, płyty o symetrii regularnej i płyty izotropowe	30
8. Płyty o ortotropii technicznej	33
Rozdział II. Zginanie walcowe pasm płytowych	36
1. Zginanie walcowe izotropowych lub ortotropowych pasm płytowych	36
1.1. Płyty izotropowe	36
1.2. Jednorodne ortotropowe pasma płytowe	39
2. Statycznie wyznaczalne i statycznie niewyznaczalne zginanie walcowe pasm płytowych	40
2.1. Równania równowagi i uwagi o rozwiązywaniu zadań statycznie wyznaczalnych	40
2.2. Przykłady zadań statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych	43
2.2.1. Płyta swobodnie podparta obciążona równomiernie	43
2.2.2. Płyta wspornikowa	46
2.2.3. Pasma płytowe statycznie niewyznaczalne	51
2.2.4. Pasma płytowe statycznie niewyznaczalne – zastosowanie programu Mathematica	52
3. Przykładowe zadania dotyczące zginania pasm płytowych	54
3.1. Pasma płytowe o rozwiązaniach bez całek szczególnych	54
3.1.1. Podstawowe równania	54
3.1.2. Pasma płytowe swobodnie podparte, obciążone na brzegu momentami	55

3.1.3. Pasma swobodnie podparte, obciążone wzdłuż linii w środku rozpiętości	58
3.2. Pasma płytowe o rozwiązaniach z całkami szczególnymi	60
3.2.1. Podstawowe równania	60
3.2.2. Pasma utwierdzone, obciążone równomiernie	60
3.2.3. Pasma wspornikowe obciążone równomiernie	63
3.2.4. Pasma płytowe na jednym brzegu swobodnie podparte, a na drugim utwierdzone, obciążone równomiernie	64
4. Zastosowanie dystrybucji Diraca i funkcje Greena	65
4.1. Dystrybucje Diraca i Heaviside'a	65
4.2. Pasma płytowe swobodnie podparte, obciążone wzdłuż prostej	67
4.2.1. Rozwiązanie zadania brzegowego z zastosowaniem dystrybucji	67
4.2.2. Funkcje Greena dla pasma płytowego swobodnie podpartego	70
4.3. Funkcje Greena i ich zastosowanie w typowych pasmach płytowych	71
4.3.1. Funkcje Greena i zasada superpozycji	71
4.3.2. Przykłady zastosowania funkcji Greena	72
4.4. Funkcje Greena w programie Mathematica	75
5. Pasma płytowe o zmiennej sztywności	78
5.1. Podstawowe równania	78
5.2. Pasma płytowe o zmiennym module Younga swobodnie podparte, obciążone równomiernie	79
5.3. Zastosowanie programu Mathematica do zagadnień pasm o zmiennej wysokości	80
Rozdział III. Zginanie walcowe pasma płytowego na sprężystym podłożu	84
1. Zależności podstawowe	84
1.1. Rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego na ugięcie płyty	84
1.2. Uwagi o rozwiązywaniu zadania pasma płytowego obciążonego równomiernie	85
2. Przykłady wstępne	89
2.1. Nieskończona płyta obciążona momentem rozłożonym na linii	89
2.2. Płyta w kształcie półpłaszczyzny obciążona równomiernie na brzegu	91
2.3. Nieskończona płyta obciążona równomiernie na linii	93
3. Symetryczne pasma płytowe	101
3.1. Podstawowe zależności	101
3.2. Zadania bez całki szczególnej	101
3.2.1. Płyta swobodnie spoczywająca na sprężystym podłożu, obciążona momentami na brzegu	101
3.2.2. Płyta swobodnie podparta, obciążona momentami na brzegu	104
3.2.3. Płyta swobodnie spoczywająca na sprężystym podłożu, obciążona siłami na brzegu	106
3.3. Pasma płytowe obciążone równomiernie	106
3.3.1. Płyta swobodnie podparta, równomiernie obciążona	106

3.3.2. Płyta utwardzona, równomiernie obciążona	107
3.4. Wybrane przykłady i ćwiczenia	108
4. Przykłady – płyty w kształcie płaszczyzny lub półpłaszczyzny	108
4.1. Nieskończona płyta na sprężystym podłożu obciążona na pasie	108
4.2. Płyta w kształcie półpłaszczyzny obciążona na pasie przy brzegu	112
5. Pasma płytowe	114
5.1. Pasma równomiernie obciążone na linii	114
5.2. Pasma obciążone równomiernie na powierzchni i siłą na linii	116
7 Rozdział IV. Zależności teorii płyt anizotropowych w zapisie tensorowym	121
1. Podstawowe równania i zależności liniowej teorii sprężystości	121
1.1. Uwagi wstępne	121
1.2. Sformułowanie zagadnienia brzegowego	122
2. Sformułowanie zadania statyki płyt w notacji absolutnej	124
2.1. Płyty izotropowe	124
2.2. Płyty anizotropowe	128
3. Energia sprężystości w płytach izotropowych i anizotropowych	130
4. Płyty z kompozytów włóknistych	131
4.1. Płaski stan naprężenia, macierz zbrojona kilkoma rodzinami włókien	131
4.2. Typy symetrii materiału	132
4.3. Przykłady	133
5. Płyty żelbetowe	134
6. Przykłady ilustrujące podstawowe zależności i równania teorii płyt	136
6.1. Trójkątna płyta równoboczna	
6.1.1. Swobodnie podparta płyta, obciążona równomiernie na brzegach rozłożonymi momentami	136
6.1.2. Swobodnie podparta płyta, obciążona równomiernie	139
6.2. Zastosowanie rozwiązań osobliwych	142
6.3. Utwardzona anizotropowa płyta eliptyczna obciążona równomiernie	146
Rozdział V. Równania jednorodnych płyt izotropowych we współrzędnych biegunowych	151
1. Układy współrzędnych kartezjańskich, walcowych i biegunowych	151
2. Współrzędne biegunowe	152
2.1. Lokalna baza i kobaza oraz baza fizyczna	152
2.2. Gradient, dywergencja, laplasjan i bilaplasjan	154
3. Wyprowadzenie podstawowych równań teorii płyt izotropowych we współrzędnych biegunowych	156
3.1. Kąty obrotu przekrojów poprzecznych płyty	156
3.2. Laplasjan i bilaplasjan oraz równanie różniczkowe ugięcia płyty	157

3.3. Tensor krzywizn i tensor momentów	158
3.4. Siły poprzeczne	159
Rozdział VI. Płyty o symetrii kołowej	161
1. Ogólne rozwiązanie zadania zginania izotropowych płyt kołowych i pierścieniowych	161
2. Ćwiczenia wstępne	167
2.1. Zależności podstawowe	167
2.2. Przykłady	168
2.2.1. Swobodnie podparta płyta kołowa obciążona momentem na brzegu	168
2.2.2. Płyta swobodnie podparta i płyta utwierdzona obciążona równomiernie	170
2.2.3. Płyta pierścieniowa obciążona równomiernie	177
2.2.4. Płyty pierścieniowe obciążone na brzegu równomiernie rozłożonymi siłami	179
2.2.5. Płyta swobodnie podparta i płyta utwierdzona obciążona siłą skupioną	183
2.3. Uwagi o funkcji Greena dla płyt nieograniczonych	186
3. Pełne płyty kołowe	187
3.1. Pełne płyty kołowe utwierdzone i swobodnie podparte	187
3.2. Płyty z podporą w środku	189
3.2.1. Płyta swobodnie podparta z podporą w środku, obciążona na brzegu równomiernie rozłożonymi momentami	189
3.2.2. Płyty obciążone równomiernie	192
4. Płyty pierścieniowe	195
4.1. Płyty pierścieniowe obciążone równomiernie	195
4.1.1. Podstawowe wzory	195
4.1.2. Przykłady	196
4.2. Zadania bez całek szczególnych	198
4.2.1. Swobodnie podparta płyta kołowa z otworem obciążona momentem na brzegu	198
4.2.2. Utwierdzona płyta kołowa z otworem obciążona momentem na brzegu	200
5. Płyty ze wspornikiem	205
5.1. Płyta ze wspornikiem obciążona momentem	205
5.2. Płyta ze wspornikiem obciążona równomiernie	207
6. Wybrane zadania	208
6.1. Pełne płyty kołowe obciążone równomiernie na części obszaru	208
6.2. Płyty wieloprzęsłowe	211
7. Płyty kołowo symetryczne na sprężystym podłożu – zastosowanie programu Mathematica	211
Rozdział VII. Podwójne szeregi trygonometryczne Fouriera w zastosowaniu do zagadnień brzegowych teorii płyt	218
1. Podwójne szeregi sinusowe	218
1.1. Rozwiązanie zadania Naviera	218

1.2. Zestawienie wzorów na wielkości kinematyczne i statyczne	222
1.3. Płyty prostokątne na sprężystym podłożu	224
1.4. Przykłady wyznaczania współczynników obciążenia i ugięcia płyty w podwójnych szeregach sinusowych	225
1.4.1. Płyta swobodnie podparta, obciążona siłą skupioną	225
1.4.2. Płyta swobodnie podparta, obciążona siłami rozłożonymi równomiernie na linii	226
1.4.3. Płyty swobodnie podparte, obciążone powierzchniowo	227
1.5. Zasada superpozycji i funkcja Greena	236
1.6. Trajektorie krzywizn i momentów głównych	240
1.7. Płyta w postaci prostokątnego trójkąta równoramiennego	242
2. Podwójne szeregi trygonometryczne w płytach ortotropowych	243
2.1. Podstawowe zależności	243
2.2. Przykłady	246
3. Podwójne szeregi sinusowo-kosinusowe	249
3.1. Podstawowe zależności	249
3.2. Przykłady zastosowania szeregów kosinusowo-sinusowych	250
3.2.1. Obciążenie na linii	250
3.2.2. Obciążenie na linii – zginanie walcowe	251
3.2.3. Obciążenie siłą punktową	252
3.2.4. Półpasmo obciążone periodycznie	253
4. Podwójne szeregi kosinusowo-kosinusowe	255
4.1. Podstawowe zależności	255
4.2. Przykłady zastosowania szeregów kosinusowo-kosinusowych	257
4.2.1. Płyta spoczywająca na słupie, obciążona siłą skupioną	257
4.2.2. Płyta spoczywająca na słupie, obciążona równomiernie na powierzchni prostokąta	258
5. Wybrane przykłady zastosowania podwójnych szeregów trygonometrycznych	259
5.1. Uwagi o zastosowaniach podwójnych szeregów trygonometrycznych	259
5.2. Płyty wzmocnione żebrem	259
6. Zastosowanie podwójnych szeregów sinusowych w programie Mathematica	262
6.1. Płyta swobodnie podparta, obciążona punktowo	262
6.2. Płyta swobodnie podparta, obciążona wzdłuż krzywej	266
Rozdział VIII. Zastosowanie pojedynczych szeregów trygonometrycznych Fouriera	269
1. Płyty izotropowe	269
1.1. Rozwiązanie ogólnego zadania Lévy'ego	269
1.2. Przykłady	273
2. Pojedyncze szeregi trygonometryczne w płytach ortotropowych	275

2.1. Dyskusja ogólnych rozwiązań zadania zginania płyt	275
2.2. Przykłady określania typu rozwiązania zadania dla różnych materiałów ortotropowych	278
3. Płyty izotropowe i ortotropowe na sprężystym podłożu	281
4. Zastosowanie szeregów pojedynczych w półpasmach	283
4.1. Ogólne zależności	283
4.2. Przypadki szczególne podparcia półpasma płytowego	285
4.2.1. Utwierdzenie z przesuwem – zginanie walcowe	285
4.2.2. Brzeg swobodnie podparty	287
4.2.3. Utwierdzenie	288
4.2.4. Brzeg swobodny	290
4.3. Przykłady pasm i półpasm płytowych o różnych warunkach brzegowych	292
5. Płyty symetryczne	297
5.1. Uwagi wstępne	297
5.2. Płyty izotropowe	298
5.2.1. Płyta prostokątna swobodnie podparta	298
5.2.2. Płyta na dwóch brzegach swobodnie podparta i na dwóch brzegach utwierdzona	300
5.2.3. Płyta na dwóch brzegach swobodnie podparta i na dwóch brzegach swobodna	301
5.3. Płyty ortotropowe	302
5.3.1. Płyta na dwóch brzegach swobodnie podparta i na dwóch brzegach utwierdzona	302
6. Płyty o różnych warunkach brzegowych	304
6.1. Uwagi	304
6.2. Swobodnie podparta płyta prostokątna zginana momentami rozłożonymi wzdłuż krawędzi	306
6.2.1. Obciążenie symetryczne	307
6.2.2. Obciążenie antysymetryczne	308
6.2.3. Obciążenie dowolne	309
6.3. Wybrane przykłady	309
Rozdział IX. Zastosowanie szeregów trygonometrycznych Fouriera we współrzędnych biegunowych	311
1. Zestawienie podstawowych zależności	311
1.1. Uwagi wstępne	311
1.2. Płyty o kształcie koła i pierścienia obciążone niesymetrycznie	313
2. Płyty o kształcie wycinka koła lub pierścienia – zastosowanie pojedynczych szeregów sinusowych	316
2.1. Podstawowe zależności	316
2.2. Płyta półkola obciążona równomiernie	318
2.2.1. Płyta półkola swobodnie podparta	319
2.2.2. Płyta półkola swobodnie podparta na brzegu prostoliniowym i utwierdzona na brzegu krzywoliniowym	320

3. Płyty kołowe, pierścieniowe i półkoliste z niesymetrycznym obciążeniem liniowym	321
3.1. Sformułowanie rozpatrywanych zadań i zestawienie wzorów	321
3.2. Płyta pierścieniowa	322
3.3. Płyta kołowa zamknięta	323
3.4. Przykłady	324
Rozdział X. Metody wariacyjne	327
1. Metody Ritza-Timoshenki i Bubnowa-Galerkina	327
1.1. Uwagi wstępne	327
1.2. Metoda Ritza-Timoshenki	328
1.3. Metoda Bubnowa-Galerkina	329
2. Przykłady wstępne	330
2.1. Zginanie walcowe płyt obustronnie utwierdzonej i obustronnie swobodnie podpartej	330
2.1.1. Płyta utwierdzona	330
2.1.2. Płyta swobodnie podparta	332
2.1.3. Różne przykłady obciążenia	333
2.2. Zginana walcowo płyta na jednym z brzegów utwierdzona	338
2.2.1. Swobodnie podparty drugi brzeg płyty	338
2.2.2. Płyta wspornikowa	339
2.3. Płyta prostokątna przegubowo podparta na wszystkich brzegach	341
2.3.1. Obciążenie równomierne	341
2.3.2. Obciążenie w środku siłą skupioną	343
2.3.3. Płyta ortotropowa	344
2.4. Płyta prostokątna na dwóch brzegach przegubowo podparta, zaś na dwóch utwierdzona, obciążona siłą skupioną w środku	346
2.4.1. Metoda R-T	347
2.4.2. Metoda B-G	348
2.4.3. Płyta ortotropowa	349
2.5. Utwierdzona płyta prostokątna	350
2.5.1. Płyta izotropowa	350
2.5.2. Płyta ortotropowa	352
3. Przykłady zastosowania metod wariacyjnych w przypadku płyt kołowo symetrycznych	353
3.1. Funkcja energii sprężystości	353
3.2. Płyta kołowa utwierdzona na obwodzie	354
3.3. Płyta kołowa podparta przegubowo na obwodzie	360
3.3.1. Płyta kołowa podparta przegubowo, obciążona równomiernie	360
3.3.2. Płyta kołowa podparta przegubowo na obwodzie, obciążona siłą P w środku	364

3.4. Płyta kołowa na sprężystym podłożu obciążona siłą w środku	367
3.5. Wybrane przykłady zagadnień kołowo symetrycznych	369
Dodatek. Przykłady rozwiązań zadań brzegowych w programie Mathematica	371
1. Elementy środowiska pakietu Mathematica	371
2. Przykłady rozwiązań zadań izotropowych płyt Kirchhoffa	375
2.1. Zginanie walcowe na podłożu Winklera z uwzględnieniem więzów jednostronnych	375
2.2. Funkcja Greena w podwójnych szeregach sinusowych	379
2.3. Płyta swobodnie podparta, obciążona na obszarze trójkątnym	379
2.4. Płyta swobodnie podparta, obciążona na obszarze kołowym	383
2.5. Płyta swobodnie podparta, obciążona momentami równomiernie na dwóch krawędziach	387
3. Przykłady zastosowania metod aproksymacyjnych do rozwiązywania zadań anizotropowych płyt Kirchhoffa	389
3.1. Płyta o ortotropii technicznej utwierdzona na wszystkich brzegach	390
3.2. Płyta o ortotropii technicznej swobodnie podparta na wszystkich brzegach	395
Bibliografia	398