

SPIS RZECZY

Wstęp

LICZBY RZECZYWISTE

§ 1. Liczby wymierne

1. Uwagi wstępne.	5
2. Uporządkowanie zbioru liczb wymiernych	6
3. Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych.	6
4. Mnożenie i dzielenie liczb wymiernych	8
5. Aksjomat Archimedesesa.	9

§ 2. Wprowadzenie liczb wymiernych. Relacja uporządkowania w zbiorze liczb rzeczywistych

6. Definicja liczby rzeczywistej	10
7. Relacja uporządkowania liczb rzeczywistych	12
8. Tezy pomocnicze.	13
9. Przedstawienie liczby rzeczywistej nieskończonym ułamkiem dziesiętnym	14
10. Ciągłość zbioru liczb rzeczywistych.	16
11. Krańce zbiorów liczbowych.	17

§ 3. Działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych

12. Określenie sumy liczb rzeczywistych.	19
13. Własności sumy.	20
14. Definicja iloczynu liczb rzeczywistych.	22
15. Własności mnożenia.	23
16. Uwagi dodatkowe.	25
17. Wartości bezwzględne.	25

§ 4. Dalsze własności i zastosowania liczb rzeczywistych

18. Istnienie pierwiastka. Potęga o wykładniku wymiernym	26
19. Potęga o dowolnym wykładniku rzeczywistym.	27
20. Logarytmy.	29
21. Mierzenie odcinków.	30

Rozdział I

TEORIA GRANIC

§ 1. Ciąg i jego granica

22. Wielkość zmienna, ciąg	33
23. Granica ciągu	35
24. Ciągi zbieżne do zera	36
25. Przykłady.	37
26. Pewne twierdzenia o ciągu mającym granicę	41
27. Granice nieskończone.	42

§ 2. Twierdzenia o granicach ułatwiające znajdowanie granic

28. Przejście do granicy w równości i w nierówności	44
29. Lematy o ciągach zbieżnych do zera	46
30. Działania arytmetyczne na ciągach	47
31. Wyrażenia nieoznaczone.	48
32. Przykłady znajdowania granic	50
33. Twierdzenie Stolza i jego zastosowania.	55

§ 3. Ciąg monofoniczny

34. Granica ciągu monofonicznego	58
35. Przykłady.	59
36. Liczba e	64
37. Przybliżone obliczenie liczby e	66
38. Lemat o przedziałach zstępujących.	69

§ 4. Kryterium zbieżności. Punkty skupienia

39. Zasada zbieżności.	70
40. Podciągi i punkty skupienia	72
41. Lemat Bolzano-Weierstrassa	73
42. Granice górna i dolna	75

Rozdział II

FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ

§ 1. Pojęcie funkcji

43. Zmienna i obszar jej zmienności.	78
44. Zależność funkcyjna między zmiennymi. Przykłady.	79
45. Definicja pojęcia funkcji	80
46. Analityczny sposób określenia funkcji	82
47. Wykres funkcji	84
48. Ważniejsze klasy funkcji	86

49. Pojęcie funkcji odwrotnej	90
50. Funkcje cyklotometryczne (kołowe).	91
51. Superpozycja funkcji. Uwagi końcowe.	95
§ 2. Granica funkcji	
52. Definicja granicy funkcji	96
53. Sprowadzenie do przypadku ciągu.	97
54. Przykłady.	99
55. Rozszerzenie teorii granic.	106
56. Przykłady.	109
57. Granica funkcji monofonicznej.	m
58. Ogólne kryterium Bolzano-Cauchy'ego.	112
59. Granice górna i dolna funkcji	113
§ 3. Klasyfikacja wielkości nieskończenie małych i nieskończenie dużych	
60. Porównywanie nieskończenie małych	114
61. Skala nieskończenie małych	115
62. Nieskończenie małe równoważne.	H ^{r1}
63. Wydzielenie części głównej.	H8
64. Zadania.	119
65. Klasyfikacja nieskończenie dużych.	121
§ 4. Ciągłość (i punkty nieciągłości) funkcji	
66. Określenie ciągłości funkcji w punkcie	122
67. Działania arytmetyczne na funkcjach ciągłych	124
68. Przykłady funkcji ciągłych.	124
69. Ciągłość jednostronna. Klasyfikacja nieciągłości	126
70. Przykłady funkcji nieciągłych.	127
71. Ciągłość i nieciągłości funkcji monofonicznej	129
72. Ciągłość funkcji elementarnych.	130
73. Superpozycja funkcji ciągłych	131
74. Rozwiązanie pewnego równania funkcyjnego	132
75. Charakterystyka funkcyjna funkcji wykładniczej, logarytmicznej i potęgowej	133
76. Charakterystyka funkcyjna kosinusa trygonometrycznego i hiperbolicznego	135
77. Wykorzystanie ciągłości funkcji dla obliczania granic.	137
78. Wyrażenia oznaczone i nieoznaczone w postaci potęgi.	140
79. Przykłady.	141
§ 5. Własności funkcji ciągłych	
80. Twierdzenie o zerowaniu się funkcji.	142
81. Zastosowanie do rozwiązywania równań.	144
82. Twierdzenie o wartości średniej.	145
83. Istnienie funkcji odwrotnej.	1***
84. Twierdzenie o ograniczoności funkcji.	148
85. Największa i najmniejsza wartość funkcji	149
86. Pojęcie ciągłości jednostajnej.	151
87. Twierdzenie Cantora	152
88. Lemat Borela	153
89. Nowe dowody podstawowych twierdzeń.	155

Rozdział III

POCHODNE I RÓŻNICZKI

§ 1. Pochodna i jej obliczanie

90. Zadanie obliczenia prędkości poruszającego się punktu	.158
91. Zadanie znalezienia stycznej do krzywej	.159
92. Definicja pochodnej	.161
93. Przykłady obliczania pochodnych	.164
94. Pochodna funkcji odwrotnej	.167
95. Zestawienie wzorów na pochodne	.169
96. Wzór na przyrost funkcji	.170
97. Najprostsze reguły obliczania pochodnych	.171
98. Pochodna funkcji złożonej	.173
99. Przykłady	.174
100. Pochodne jednostronne	.180
101. Pochodne nieskończone	.181
102. Dalsze przykłady przypadków specjalnych	.181

§ 2. Różniczka

103. Definicja różniczki	.182
104. Związek między różniczkowalnością a istnieniem pochodnej	.184
105. Podstawowe wzory i reguły różniczkowania	.185
106. Niezmienniczość wzoru na różniczkę	.187
107. Różniczki jako źródło wzorów przybliżonych	.189
108. Zastosowanie różniczek do szacowania błędów	.191

§ 3. Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego

109. Twierdzenie Fermata	.193
110. Twierdzenie Darboux	.194
111. Twierdzenie Rolle'a	.195
112. Wzór Lagrange'a	.196
113. Granica pochodnej	.198
114. Wzór Cauchy'ego	.199

§ 4. Pochodne i różniczki wyższych rzędów

115. Definicja pochodnych wyższych rzędów	.200
116. Wzory ogólne na pochodne dowolnego rzędu	.202
117. Wzór Leibniza	.205
118. Przykłady	.206
119. Różniczki wyższych rzędów	.209
120. Niezachowywanie niezmienniczości wzoru na różniczkę wyższych rzędów	.210
121. Różniczkowanie parametryczne	.210
122. Różnice skończone	.212

§ 5. Wzór Taylora

123. Wzór Taylora dla wielomianów	.214
124. Rozwinięcie dowolnej funkcji; Reszta w postaci Peana	.215

125. Przykłady.	218
126. Inne postacie reszty.	221
127. Wzory przybliżone.	224

§ 6. Interpolacja

128. Najprostsze zagadnienie interpolacji. Wzór Lagrange'a.	229
129. Reszta we wzorze interpolacyjnym Lagrange'a.	230
130. Interpolacja z krotnymi węzłami. Wzór Hermite'a.	231

Rozdział IV

BADANIE FUNKCJI ZA POMOCĄ POCHODNYCH

§ 1. Badanie przebiegu funkcji

131. Warunek stałości funkcji.	234
132. Warunek monotoniczności funkcji.	236
133. Dowód pewnych nierówności.	238
134. Maksima i minima; warunki konieczne.	241
135. Warunki dostateczne. Reguła pierwsza.	243
136. Przykłady.	244
137. Reguła druga.	248
138. Wykorzystanie pochodnych wyższych rzędów.	250
139. Znajdowanie wartości największych i najmniejszych.	252
140. Zadania.	253

§ 2. Funkcje wypukłe i wklęsłe

141. Definicja funkcji wypukłej (wklęsłej).	256
142. Najprostsze twierdzenia o funkcjach wypukłych.	258
143. Warunki wypukłości funkcji.	260
144. Nierówność Jensena i jej zastosowania.	263
145. Punkty przegięcia.	264

§ 3. Konstrukcja wykresów funkcji

146. Postawienie zagadnienia.	266
147. Schemat konstrukcji wykresu. Przykłady.	267
148. Nieciągłości nieskończone, przedział nieskończony. Asymptoty.	269
149. Przykłady.	272

§ 4. Obliczenie nieoznaczoności

150. Wyrażenia nieoznaczone typu $0/0$	275
151. Wyrażenia nieoznaczone typu ∞/∞	279
152. Inne typy nieoznaczoności.	282

§ 5. Przybliżone rozwiązywanie równań

153. Uwagi wstępne.	284
154. Reguła części proporcjonalnych (metoda siecznej).	285
155. Reguła Newtona (metoda stycznej).	288

156. Przykłady i ćwiczenia	289
157. Metoda kombinowana	293
158. Przykłady i ćwiczenia	294

Rozdział V

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

§ 1. Pojęcia podstawowe

159. Zależność funkcyjna między zmiennymi. Przykłady.	298
160. Funkcje dwóch zmiennych i obszary zmienności ich argumentów.	299
161. Arytmetyczna przestrzeń n -wymiarowa	302
162. Przykłady obszarów w przestrzeni n -wymiarowej.	305
163. Ogólna definicja obszaru otwartego i obszaru domkniętego.	307
164. Funkcje n zmiennych.	309
165. Granica funkcji wielu zmiennych	310
166. Związek z teorią ciągów.	312
167. Przykłady.	314
168. Granice iterowane.	316

§ 2. Funkcje ciągłe

169. Ciągłość i nieciągłości funkcji wielu zmiennych	318
170. Działania na funkcjach ciągłych.	320
171. Funkcje ciągłe w obszarze. Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego.	321
172. Lemat Bolzano-Weierstrassa.	322
173. Twierdzenie Weierstrassa.	324
174. Ciągłość jednostajna	325
175. Lemat Borela.	327
176. Nowe dowody podstawowych twierdzeń.	328

§ 3. Pochodne i różniczki funkcji wielu zmiennych

177. Pochodne cząstkowe i różniczki cząstkowe.	329
178. Przyrost zupełny funkcji.	332
179. Różniczka zupełna	335
180. Interpretacja geometryczna w przypadku funkcji dwóch zmiennych.	336
181. Pochodne funkcji złożonych	339
182. Przykłady.	340
183. Wzór Lagrange'a	343
184. Pochodna kierunkowa	344
185. Niezmienniczość wzoru na pierwszą różniczkę.	346
186. Zastosowanie różniczki zupełnej do rachunków przybliżonych.	348
187. Funkcje jednorodne.	351
188. Wzór Eulera	352

§ 4. Pochodne i różniczki wyższych rzędów

189. Pochodne wyższych rzędów.	353
190. Twierdzenia o pochodnych mieszanych	356
191. Uogólnienie.	359

192. Pochodne wyższych rzędów funkcji złożonej	360
193. Różniczki wyższych rzędów	361
194. Różniczki funkcji złożonych	364
195. Wzór Taylora	365

§ 5. Ekstrema, wartości największe i najmniejsze

196. Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Warunki konieczne	367
197. Warunki dostateczne (przypadek funkcji dwu zmiennych)	369
198. Warunki dostateczne (przypadek ogólny)	372
199. Warunki nieistnienia ekstremów	375
200. Największe i najmniejsze wartości funkcji. Przykłady	376
201. Zadania	380

Rozdział VI

WYZNACZNIKI FUNKCYJNE I ICH ZASTOSOWANIA

§ 1. Własności formalne wyznaczników funkcyjnych

202. Definicja wyznaczników funkcyjnych (jakobianów)	389
203. Mnożenie jakobianów	390
204. Mnożenie macierzy funkcyjnych (macierzy Jacobiego)	392

§ 2. Funkcje uwikłane

205. Pojęcie funkcji uwikłanej jednej zmiennej	395
206. Istnienie funkcji uwikłanej	396
207. Różniczkowalność funkcji uwikłanej	398
208. Funkcje uwikłane wielu zmiennych	400
209. Obliczanie pochodnych funkcji uwikłanych	406
210. Przykłady	409

§ 3. Niektóre zastosowania teorii funkcji uwikłanych

211. Ekstrema warunkowe	413
212. Metoda czynników nieoznaczonych Lagrange'a	416
213. Warunki dostateczne istnienia ekstremum warunkowego	417
214. Przykłady i zadania	418
215. Pojęcie niezależności funkcji	423
216. Rząd macierzy Jacobiego	425

§ 4. Zamiana zmiennych

217. Funkcje jednej zmiennej	428
218. Przykłady	431
219. Funkcje wielu zmiennych. Zamiana zmiennych niezależnych	434
220. Metoda obliczania różniczek	436
221. Przypadek ogólny zamiany zmiennych	437
222. Przykłady	439

Rozdział VII

ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO DO GEOMETRII

§ 1. Przedstawienie analityczne krzywych i powierzchni

223. Krzywa na płaszczyźnie we współrzędnych prostokątnych	448
224. Przykłady.	450
225. Krzywe pochodzenia mechanicznego.	453
226. Krzywe na płaszczyźnie we współrzędnych biegunowych.	456
227. Powierzchnie i krzywe w przestrzeni	460
228. Przedstawienie parametryczne.	461
229. Przykłady.	463

§ 2. Prosta styczna i płaszczyzna styczna

230. Styczna do krzywej płaskiej we współrzędnych prostokątnych.	466
231. Przykłady.	468
232. Styczna we współrzędnych biegunowych.	470
233. Przykłady.	471
234. Styczna do krzywej przestrzennej. Płaszczyzna styczna do powierzchni.	472
235. Przykłady.	476
236. Punkty osobliwe krzywej płaskiej.	477
237. Przypadek parametrycznego przedstawienia krzywej.	482

§ 3. Styczność krzywych

238. Obwiednią rodziny krzywych.	483
239. Przykłady.	486
240. Punkty charakterystyczne.	490
241. Rząd styczności dwóch krzywych.	491
242. Przypadek, gdy jedna z krzywych jest dana równaniem uwikłanym.	493
243. Krzywa ściśle styczna.	494
244. Inne podejście do krzywych ściśle stycznych.	496

§ 4. Długość krzywej płaskiej

245. Lematy.	497
246. Zwrot na krzywej.	498
247. Długość krzywej. Addytywność długości łuku.	499
248. Warunki dostateczne prostowalności. Różniczka łuku.	501
249. Łuk jako parametr. Zwrot dodatni stycznej.	504

§ 5. Krzywizna krzywej płaskiej

250. Pojęcie krzywizny.	506
251. Koło krzywiznowe i promień krzywizny.	509
252. Przykłady.	511
253. Współrzędne środka krzywizny.	515
254. Definicja ewoluty i ewolwenty, znajdowanie ewoluty.	516
255. Własności ewolut i ewolwent.	519
256. Znajdowanie ewolwenty.	521

Uzupełnienie

ZAGADNIENIE PRZEDŁUŻANIA FUNKCJI

237. Przypadek funkcji jednej zmiennej	523
258. Postawienie zagadnienia w przypadku dwóch zmiennych.	524
259. Twierdzenia pomocnicze.	526
260. Podstawowe twierdzenie o przedłużaniu.	529
261. Uogólnienie.	530
262. Uwagi końcowe.	532
Skorowidz	535