

Spis treści

Rozdział I. Wstęp do matematyki	15
1.1. Elementy logiki i teorii zbiorów	15
1.1.1. Rachunek zdań	15
1.1.2. Reguły wnioskowania	18
1.1.3. Funkcja zdaniowa i kwantyfikatory	19
1.1.4. Działania na zbiorach	20
Zadania	22
1.2. Funkcje i relacje	23
1.2.1. Relacja	23
1.2.2. Relacja równoważności	24
1.2.3. Funkcja	26
1.2.4. Ciąg	26
1.2.5. Działania na funkcjach	27
1.2.6. Obraz i przeciwobraz	31
Zadania	33
1.3. Zbiory liczbowe	33
1.3.1. Liczby naturalne	33
1.3.2. Ciała	35
1.3.3. Liczby wymierne i rzeczywiste	36
1.3.4. Liczby zespolone	38
1.3.5. Postać trygonometryczna liczby zespolonej	40
Zadania	44
Rozdział II. Ciągi i szeregi	46
2.1. Przestrzenie metryczne I	46
2.1.1. Przykłady przestrzeni metrycznych	46
2.1.2. Kule w przestrzeniach metrycznych	48
2.1.3. Zbieżność	50
Zadania	53
2.2. Ciągi	54
2.2.1. Własności ciągów liczbowych	54
2.2.2. Ciągi liczb rzeczywistych	55
2.2.3. Metody obliczania granic	57
2.2.4. Ciągi rozbieżne do nieskończoności	62
2.2.5. Ciągi ograniczone	65
Zadania	70
2.3. Szeregi	71
2.3.1. Szeregi liczbowe	71
2.3.2. Kryteria zbieżności szeregów	74
2.3.3. Szeregi potęgowe	79

2.3.4. Szeregi funkcyjne	81
2.3.5. Uzupełnienia	84
Zadania	88
Rozdział III. Ciągłość	89
3.1. Przestrzenie metryczne II	89
3.1.1. Zbiory otwarte i domknięte	89
3.1.2. Zbiory zwarte	93
3.1.3. Przestrzeń zupełna	94
3.1.4. Zasada Banacha	96
3.1.5. Uzupełnienie: kontrakcja w przestrzeni $(H(X),h)$	102
Zadania	105
3.2. Granica i ciągłość funkcji	106
3.2.1. Definicja ciągowa (Heinego)	106
3.2.2. Definicja otoczeniowa (Cauchy'ego)	110
3.2.3. Działania na funkcjach ciągłych	113
3.2.4. Przykłady	115
Zadania	122
3.3. Własności funkcji ciągłych	123
3.3.1. Własność Darboux	123
3.3.2. Funkcje ciągłe na zbiorach zwartych	126
3.3.3. Przestrzeń funkcji ciągłych	128
Zadania	132
Rozdział IV. Różniczkowalność	133
4.1. Pochodna funkcji jednej zmiennej	133
4.1.1. Definicja pochodnej	133
4.1.2. Podstawowe twierdzenia	136
4.1.3. Pochodne funkcji elementarnych	138
4.1.4. Przykłady	140
4.1.5. Pochodne wyższych rzędów	144
Zadania	147
4.2. Twierdzenia o wartości średniej i ich zastosowania	148
4.2.1. Twierdzenia o wartości średniej	148
4.2.2. Wzór Taylora	151
4.2.3. Badanie przebiegu zmienności funkcji	157
4.2.4. Reguła de L'Hospitala	164
4.2.5. Przybliżone rozwiązywanie równań	168
Zadania	171
4.3. Pochodne funkcji wielu zmiennych	172
4.3.1. Elementy algebry liniowej	172
4.3.2. Odwzorowania liniowe	177
4.3.3. Pochodne cząstkowe	178
4.3.4. Pochodna Fréchéta	180
4.3.5. Pochodna kierunkowa	183
4.3.6. Zastosowania różniczki i pochodnej	186
4.3.7. Pochodna funkcji złożonej	189

4.3.8. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów	191
4.3.9. Pochodne w przestrzeniach unormowanych	193
4.3.10. Operatory teorii pola	194
Zadania	195
4.4. Ekstrema funkcji	199
4.4.1. Wzór Taylora	199
4.4.2. Ekstrema lokalne	201
4.4.3. Ekstrema globalne	207
Zadania	209
4.5. Twierdzenie o funkcji odwrotnej i jego zastosowania	210
4.5.1. Twierdzenie o funkcji odwrotnej	210
4.5.2. Twierdzenie o funkcji uwikłanej	215
4.5.3. Powierzchnie	220
4.5.4. Powierzchnie domknięte i kawałkami gładkie	227
4.5.5. Ekstrema warunkowe	230
Zadania	236
Rozdział V. Całki	239
5.1. Całka nieoznaczona	239
5.1.1. Definicja całki nieoznaczonej	239
5.1.2. Podstawowe całki	240
5.1.3. Całkowanie przez części	241
5.1.4. Całkowanie przez podstawienie	243
5.1.5. Całkowanie funkcji wymiernych	245
5.1.6. Całkowanie pewnych funkcji niewymiernych	250
Zadania	255
5.2. Całka oznaczona	256
5.2.1. Definicja całki oznaczonej	256
5.2.2. Całkowalność funkcji	259
5.2.3. Własności całki oznaczonej	261
5.2.4. Związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną	264
5.2.5. Zastosowania geometryczne całki	265
5.2.6. Całki niewłaściwe i ich zastosowania	270
5.2.7. Twierdzenie o przejściu do granicy pod znakiem całki	272
5.2.8. Różniczkowanie całki zależnej od parametru	274
5.2.9. Uogólnienia: całka Riemanna-Stieltjesa i całka z funkcji o wartościach w \mathbb{R}^n	276
5.2.10. Funkcje specjalne	276
Zadania	277
5.3. Całki wielokrotne	279
5.3.1. Definicja całki wielokrotnej	279
5.3.2. Całka iterowana i wzór Fubiniego	281
5.3.3. Całka wielokrotna po dowolnym zbiorze	285
5.3.4. Zastosowania całek wielokrotnych	289
5.3.5. Twierdzenie o zamianie zmiennych	293
Zadania	300
5.4. Całki krzywoliniowe	301

5.4.1. Orientacja	301
5.4.2. Całka krzywoliniowa zorientowana	308
5.4.3. Całka krzywoliniowa niezorientowana	313
5.4.4. Związek całek zorientowanych i niezorientowanych	314
5.4.5. Zastosowania całek krzywoliniowych	315
5.4.6. Wzór Greena i pole potencjalne	316
Zadania	321
5.5. Całki powierzchniowe	322
5.5.1. Całka powierzchniowa niezorientowana	322
5.5.2. Całka powierzchniowa zorientowana	324
5.5.3. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego	326
5.5.4. Twierdzenie Stokesa	328
5.5.5. Równanie Poissona	331
Zadania	335
Rozdział VI. Funkcje zespolone	337
6.1. Pochodna i całka	337
6.1.1. Pochodna zespolona	337
6.1.2. Równania Cauchy'ego-Riemanna	340
6.1.3. Całka zespolona	342
6.1.4. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego	344
Zadania	348
6.2. Własności funkcji analitycznych	349
6.2.1. Wzór całkowy Cauchy'ego	349
6.2.2. Rozwijalność funkcji analitycznej w szereg potęgowy	350
6.2.3. Nierówności Cauchy'ego i zasada maksimum	353
6.2.4. Szereg Laurenta i punkty osobliwe	354
Zadania	358
6.3. Zastosowania funkcji analitycznych	359
6.3.1. Rachunek residuów	359
6.3.2. Funkcje harmoniczne	363
Zadania	369
Rozdział VII. Równania różniczkowe	370
7.1. Metody rozwiązywania równań różniczkowych	370
7.1.1. Uwagi ogólne	370
7.1.2. Modele przyrodnicze prowadzące do równań różniczkowych zwyczajnych	370
7.1.3. Równanie o zmiennych rozdzielonych	372
7.1.4. Równanie zupełne	377
7.1.5. Równanie liniowe i równanie Bernoulliego	380
7.1.6. Równania rzędu drugiego sprowadzalne do równań pierwszego rzędu	384
7.1.7. Uwagi o efektywnym rozwiązywaniu równań różniczkowych	387
Zadania	387
7.2. Podstawowe twierdzenia	388
7.2.1. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności	388

7.2.2. Metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych	397
7.2.3. Ciągła zależność od warunków początkowych i parametru	398
7.2.4. Metoda małego parametru	401
7.2.5. Zastosowanie szeregów potęgowych w teorii równań różniczkowych	406
Zadania	408
7.3. Równania i układy równań liniowych	409
7.3.1. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności	409
7.3.2. Układ liniowy jednorodny	411
7.3.3. Rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego	412
7.3.4. Układ jednorodny o stałych współczynnikach	413
7.3.5. Układ niejednorodny ze stałą macierzą A	422
7.3.6. Równanie liniowe	425
7.3.7. Równanie liniowe o stałych współczynnikach	426
7.3.8. Analiza równania drgań	433
Zadania	437
7.4. Elementy jakościowej teorii równań różniczkowych	438
7.4.1. Równanie autonomiczne	438
7.4.2. Stabilność	441
7.4.3. Twierdzenie Liouville'a	443
7.4.4. Uzupełnienie: twierdzenie ergodyczne	447
Zadania	449
7.5. Zastosowania w mechanice Newtona	449
7.5.1. Zasady mechaniki	449
7.5.2. Układ jednowymiarowy	453
7.5.3. Pole potencjalne	456
7.5.4. Pole centralne	458
7.5.5. Ogólne prawa ruchu	462
7.5.6. Ruch w nieinercjalnym układzie współrzędnych	465
Zadania	469
7.6. Elementarne wiadomości o równaniach cząstkowych	475
7.6.1. Równania cząstkowe pierwszego rzędu	475
7.6.2. Równanie ciągłości	481
7.6.3. Klasyfikacja równań cząstkowych drugiego rzędu	485
7.6.4. Równanie struny	489
7.6.5. Równania Laplace'a i Poissona	492
7.6.6. Równanie dyfuzji	494
Zadania	496
Rozdział VIII. Teoria całki Lebesgue'a	498
8.1. Przestrzeń z miarą	499
8.1.1. Zbiory mierzalne	499
8.1.2. Zbiory borelowskie	500
8.1.3. Miara	502
8.1.4. Miara Lebesgue'a	503
8.1.5. Miara zupełna	503
8.1.6. Własności miary	505

Zadania	506
8.2. Funkcje mierzalne	507
8.2.1. Definicja funkcji mierzalnej	507
8.2.2. Własności funkcji mierzalnych	508
8.2.3. Funkcje proste	510
Zadania	511
8.3. Całka Lebesgue'a	512
8.3.1. Definicja całki Lebesgue'a	512
8.3.2. Własności całki Lebesgue'a	514
8.3.3. Twierdzenia o przejściu do granicy pod znakiem całki	517
8.3.4. Całkowanie funkcji zespolonych	522
8.3.5. Całka Lebesgue'a w	524
Zadania	526
8.4. Szeregi Fouriera	526
8.4.1. Przestrzeń L^2	526
8.4.2. Przestrzeń unitarna i przestrzeń Hilberta	528
8.4.3. Układ ortonormalny	531
8.4.4. Szeregi Fouriera	535
8.4.5. Równanie Laplace'a w kole	537
Zadania	539
Rozdział IX. Dodatek	541
9.1. Transformacja Fouriera	541
9.1.1. Twierdzenie Fubinięgo	541
9.1.2. Splot	542
9.1.3. Transformacja Fouriera	543
9.1.4. Odwrotna transformacja Fouriera	545
9.1.5. Równanie przewodnictwa cieplnego	547
Zadania	549
9.2. Transformacja Laplace'a	550
9.2.1. Definicja transformaty Laplace'a	550
9.2.2. Własności transformaty Laplace'a	552
9.2.3. Zastosowania transformacji Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych	553
Zadania	555
9.3. Elementy rachunku wariacyjnego	555
9.3.1. Ekstrema funkcjonałów	555
9.3.2. Ekstremale funkcjonału działania	558
9.3.3. Przykłady	561
9.3.4. Związek rachunku wariacyjnego z mechaniką Newtona	568
9.3.5. Równania Hamiltona	570
9.3.6. Obserwacje, nawiasy Poissona, całki pierwsze	573
Zadania	575
9.4. Teoria dystrybucji	577
9.4.1. Motywacje	577
9.4.2. Przestrzeń funkcji próbnych	579
9.4.3. Dystrybucje	586

9.4.4. Przestrzenie dystrybucji	596
9.4.5. Operacje na dystrybucjach	598
9.4.6. Przykłady zastosowań teorii dystrybucji	608
9.4.7. Uwagi końcowe	619
Zadania	621
Literatura uzupełniająca	626
Skorowidz	628