

SPIS RZECZY

Rozdział XV

CAŁKI KRZYWOLINIOWE. CAŁKA STIELTJESA

§ 1. Całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju

543. Definicja całki krzywoliniowej pierwszego rodzaju.	5
544. Sprowadzanie całki krzywoliniowej pierwszego rodzaju do zwykłej całki oznaczonej	7
545. Przykłady.	8

§ 2. Całki krzywoliniowe drugiego rodzaju

546. Definicja całek krzywoliniowych drugiego rodzaju.	12
547. Istnienie całki krzywoliniowej drugiego rodzaju i obliczanie tej całki.	14
548. Przypadek krzywej zamkniętej. Orientacja płaszczyzny.	16
549. Przykłady.	18
550. Przybliżanie całki krzywoliniowej przez całkę po łamanej.	20
551. Obliczanie pól za pomocą całek krzywoliniowych.	21
552. Przykłady.	24
553. Związek pomiędzy całkami krzywoliniowymi obu rodzajów.	27
554. Zadania fizyczne.	29

§ 3. Warunki niezależności całki krzywoliniowej od drogi całkowania

555. Postawienie zagadnienia; związek z różniczką zupełną.	33
556. Różniczkowanie całki niezależnej od drogi całkowania.	34
557. Obliczanie całki krzywoliniowej przy pomocy pierwotnej.	36
558. Kryterium na różniczkę zupełną; znajdowanie pierwotnej, gdy obszar jest prostokątem.	37
559. Uogólnienie na przypadek dowolnego obszaru.	39
560. Wyniki końcowe.	41
561. Całki po krzywych zamkniętych.	42
562. Przypadek obszaru niejednostopijnego; występowanie punktów osobliwych.	43
563. Całka Gaussa.	47
564. Przypadek trójwymiarowy.	50
565. Przykłady.	51
566. Zastosowanie do zadań fizycznych.	56

§ 4. Funkcje o wahanii ograniczonym

567. Definicja funkcji o wahanii ograniczonym.	58
568. Klasy funkcji o wahanii ograniczonym.	59
569. Własności funkcji o wahanii ograniczonym.	62
570. Kryteria na funkcje o wahanii ograniczonym.	64
571. Funkcje ciągłe o wahanii ograniczonym.	66
572. Krzywe prostowalne.	69

S 5. Całka Stieltjesa

573. Definicja całki Stieltjesa	70
574. Ogólne warunki istnienia całki Stieltjesa	71
575. Przypadki istnienia całki Stieltjesa	72
576. Własności całki Stieltjesa	75
577. Całkowanie przez części	76
578. Sprowadzenie całki Stieltjesa do całki Riemanna	78
579. Obliczanie całek Stieltjesa	79
580. Przykłady	83
581. Ilustracja geometryczna całki Stieltjesa	87
582. Twierdzenie o wartości średniej, oszacowania	88
583. Przechodzenie do granicy pod znakiem całki Stieltjesa	90
584. Przykłady i uzupełnienia	91
585. Sprowadzanie całki krzywoliniowej drugiego rodzaju do całki Stieltjesa	95

Rozdział XVI**CAŁKI PODWÓJNE****§ 1. Definicja i najprostsze własności całki podwójnej**

586. Zagadnienie objętości walca krzywoliniowego	97
587. Sprowadzanie całki podwójnej do iterowanej	98
588. Definicja całki podwójnej	100
589. Warunki istnienia całki podwójnej	101
590. Klasy funkcji całkowalnych	102
591. Całka górna i dolna jako odpowiednie granice	104
592. Własności funkcji całkowalnych i całek podwójnych	105
593. Całka jako addytywna funkcja obszaru; różniczkowanie po obszarze	107

§ 2. Obliczanie całki podwójnej

594. Sprowadzanie całki podwójnej do iterowanej w przypadku prostokąta	110
595. Przykłady	113
596. Sprowadzenie całki podwójnej do iterowanej w przypadku obszaru krzywoliniowego	119
597. Przykłady	122
598. Zastosowania do mechaniki	132
599. Przykłady	134

§ 3. Wzór Greena

600. Wyprowadzenie wzoru Greena	140
601. Zastosowanie wzoru Greena do badania całek krzywoliniowych	144
602. Przykłady i uzupełnienia	145

§ 4. Zamiana zmiennych w całce podwójnej

603. Przekształcanie obszarów płaskich	147
604. Przykłady	150
605. Wyrażenie pola we współrzędnych krzywoliniowych	154
606. Uwagi dodatkowe	156
607. Wyprowadzenie geometryczne	158

608. Przykłady.	.160
609. Zamiana zmiennych w całkach podwójnych	.167
610. Analogia ze zwykłą całką. Całka po obszarze zorientowanym	.169
611. Przykłady.	.170

§ 5. Całki podwójne niewłaściwe

612. Całki rozciągnięte na obszar nieograniczony.	.176
613. Twierdzenie o zbieżności bezwzględnej całki podwójnej niewłaściwej.	.178
614. Sprowadzenie całki podwójnej do iterowanej.	.179
615. Całki z funkcji nieograniczonych.	.181
616. Zamiana zmiennych w całkach niewłaściwych.	.183
617. Przykłady.	.184

Rozdział XVII

POLE POWIERZCHNI. CAŁKI POWIERZCHNIOWE

§ 1. Powierzchnie dwustronne

618. Strona powierzchni.	.197
619. Przykłady.	.198
620. Orientacja powierzchni i przestrzeni	.200
621. Wybór znaku we wzorach na cosinusy kierunkowe normalnej.	.201
622. Przypadek powierzchni kawałkami gładkiej.	.202

§ 2. Pole powierzchni krzywoliniowej

623. Przykład Schwarza	.203
624. Definicja pola powierzchni krzywoliniowej.	.206
625. Uwaga.	.206
626. Istnienie pola powierzchni. Obliczanie pola.	.208
627. Przybliżanie pola przy pomocy powierzchni wielościennych wpisanych.	.212
628. Szczególny przypadek definicji pola.	.213
629. Przykłady.	.214

§ 3. Całki powierzchniowe pierwszego rodzaju

630. Definicja całki powierzchniowej pierwszego rodzaju.	.226
631. Sprowadzenie do zwykłej całki podwójnej.	.227
632. Zastosowanie całek powierzchniowych pierwszego rodzaju w mechanice.	.229
633. Przykłady.	.230

§ 4. Całki powierzchniowe drugiego rodzaju

634. Definicja całki powierzchniowej drugiego rodzaju.	.236
635. Najprostsze przypadki szczególne.	.238
636. Przypadek ogólny.	.239
637. Jeden ze szczegółów dowodu.	.241
638. Wyrażenie objętości bryły przez całkę powierzchniową.	.242
639. Wzór Stokesa.	.245
640. Przykłady.	.248
641. Zastosowanie wzoru Stokesa do badania całek krzywoliniowych w przestrzeni	.252

Rozdział XVIII

CAŁKI POTRÓJNE I WIELOKROTNE

{ 1. Całka potrójna i Jej obliczanie

642. Zagadnienie obliczania masy bryły.	255
643. Całka potrójna i warunki jej istnienia	256
644. Własności funkcji całkowalnych i całek potrójnych.	257
645. Obliczanie całki potrójnej po prostopadłościanie.	258
646. Obliczanie całki potrójnej po obszarze dowolnym.	260
647. Całki potrójne niewłaściwe.	261
648. Przykłady.	262
649. Zastosowania w mechanice.	268
650. Przykłady.	269

S 2. Wzór Gaussa-Ostrogradskiego

651. Wzór Gaussa-Ostrogradskiego.	275
652. Zastosowanie wzoru Gaussa-Ostrogradskiego do badania całek powierzchniowych	278
653. Całka Gaussa	279
654. Przykłady.	280

§ 3. Z—i— zmiennych w całkach potrójnych

655. Przekształcanie obszarów przestrzennych; współrzędne krzywoliniowe.	283
656. Przykłady.	284
657. Wyrażenie objętości we współrzędnych krzywoliniowych.	286
658. Uwagi dodatkowe.	289
659. Wyprowadzenie geometryczne.	290
660. Przykłady.	291
661. Zamiana zmiennych w całce potrójnej.	298
662. Przykłady.	299
663. Ciężenie grawitacyjne. Potencjał punktu wewnętrznego.	303

§ 4. Elementy analizy wektorowej

664. Skalary i wektory.	305
665. Pola skalarne i wektorowe.	306
666. Gradient.	307
667. Strumień wektora przez powierzchnię.	308
668. Wzór Gaussa-Ostrogradskiego. Dywergencja	309
669. Cyrkulacja wektora. Wzór Stokesa. Rotacja	311
670. Pola potencjalne i bezźródłowe.	312
671. Zagadnienie odwrotne w analizie wektorowej.	315
672. Zastosowania	316

S 5. Całki wielokrotne

673. Zagadnienie grawitacji i potencjału dwóch ciał.	321
674. Objętość bryły n -wymiarowej, całka n -krotna	322
675. Zamiana zmiennych w całce n -krotnej.	324
676. Przykłady.	327

Rozdział XIX

SZEREGI FOURIERA

§ 1. Wstęp

677. Wielkości okresowe i analiza harmoniczna.	347
678. Określanie współczynników metodą Eulera-Fouriera.	349
679. Ortogonalne układy funkcji.	352
680. Interpolacja trygonometryczna.	356

§ 2. Rozwijanie funkcji w szereg Fouriera

681. Postawienie zagadnienia. Całka Dirichleta.	358
682. Pierwszy lemat podstawowy.	360
683. Zasada lokalizacji.	362
684. Kryteria Diniego i Lipschitza zbieżności szeregów Fouriera.	363
685. Drugi lemat podstawowy.	366
686. Kryterium Dirichleta-Jordana.	368
687. Przypadek funkcji nieokresowej.	369
688. Przypadek przedziału dowolnego.	371
689. Rozwinięcia w szeregi cosinusów i w szeregi sinusów.	372
690. Przykłady.	375
691. Rozwinięcie $\ln r(x)$	387

§ 3. Uzupełnienia

692. Szeregi o współczynnikach malejących.	390
693. Sumowanie szeregów trygonometrycznych przy pomocy funkcji analitycznych zmiennej zespolonej.	395
694. Przykłady.	397
695. Postać zespolona szeregów Fouriera.	401
696. Szereg sprzężony.	404
697. Wielokrotne szeregi Fouriera.	407

§ 4. Charakter zbieżności szeregów Fouriera

698. Niektóre uzupełnienia do podstawowych lematów.	408
699. Kryteria zbieżności jednostajnej szeregów Fouriera.	411
700. Zachowanie się szeregów Fouriera w pobliżu punktu nieciągłości. Przypadek szczególny.	413
701. Przypadek funkcji dowolnej.	417
702. Osobliwości szeregów Fouriera; uwagi wstępne.	419
703. Tworzenie osobliwości.	422

§ 5. Oszacowanie reszty w zależności od własności pochodnych funkcji

704. Związek między współczynnikami Fouriera funkcji i jej pochodnych.	424
705. Oszacowanie sumy częściowej w przypadku funkcji ograniczonej.	425
706. Oszacowanie reszty w przypadku funkcji o k -tej pochodnej ograniczonej.	426
707. Przypadek funkcji, której k -ta pochodna ma wahanie ograniczone.	428
708. Wpływ nieciągłości funkcji i jej pochodnych na rząd maleńia współczynników Fouriera.	429
709. Przypadek funkcji danej w przedziale $(0, \infty)$	434
710. Metoda wydzielenia osobliwości.	435

§ 6. Całka Fouriera

711. Całka Fouriera jako przypadek graniczny szeregu Fouriera	442
712. Uwagi wstępne.	444
713. Warunki dostateczne.	445
714. Modyfikacja podstawowego założenia	447
715. Różne postacie wzoru Fouriera	449
716. Przekształcenie Fouriera	451
717. Niektóre własności przekształcenia Fouriera.	453
718. Przykłady i uzupełnienia.	454
719. Przypadek funkcji dwu zmiennych	460

§ 7. Zastosowania

720. Wyrażenie anomalii ekscentrycznej planety przez anomalię średnią	462
721. Zagadnienie drgań struny.	463
722. Zagadnienie rozchodzenia się ciepła w skończonym pręcie.	468
723. Przypadek pręta nieskończonego.	471
724. Modyfikacja warunków brzegowych.	473
725. Rozchodzenie się ciepła w kołowej płytce.	474
726. Praktyczna analiza harmoniczna. Schemat dla dwunastu rzędnych	476
727. Przykłady.	478
728. Schemat dla dwudziestu czterech rzędnych.	481
729. Przykłady.	482
730. Porównanie przybliżonych i dokładnych wartości współczynników Fouriera	483

Rozdział XX

SZEREGI FOURIERA (ciąg dalszy)

§ 1. Operacje na szeregach Fouriera. Zupełność i zamkniętość

731. Całkowanie szeregu Fouriera wyraz po wyrazie.	486
732. Różniczkowanie szeregu Fouriera wyraz po wyrazie.	488
733. Zupełność układu trygonometrycznego.	489
734. Przybliżanie jednostajne funkcji. Twierdzenie Weierstrassa.	491
735. Przeciętne przybliżanie funkcji. Ekstremalne własności sum częściowych szeregu Fouriera	493
736. Zamkniętość układu trygonometrycznego. Twierdzenie Lapunowa.	496
737. Uogólnione równanie zamkniętości.	499
738. Mnożenie szeregów Fouriera	501
739. Niektóre zastosowania równania zamkniętości.	502

§ 2. Zastosowanie metod uogólnionego sumowania do szeregów Fouriera

740. Lemat podstawowy.	507
741. Sumowanie szeregów Fouriera metodą Poissona-Abela	509
742. Rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla koła.	512
743. Sumowanie szeregów Fouriera metodą Cesaro-Fejera	514
744. Niektóre zastosowania uogólnionego sumowania szeregów Fouriera.	516
745. Różniczkowanie szeregów Fouriera wyraz po wyrazie.	517

§ 3. Jednoznaczność rozwinięcia trygonometrycznego **funkcji**

746. Dodatkowe uwagi o pochodnych uogólnionych	519
747. Metoda Riemanna sumowania szeregu trygonometrycznego.	522
748. Lemat o współczynnikach szeregu zbieżnego.	526
749. Jednoznaczność rozwinięcia trygonometrycznego.	527
750. Końcowe twierdzenia o szeregach Fouriera.	528
751. Uogólnienie.	531

Uzupełnienie

OGÓLNY PUNKT WIDZENIA NA GRANICĘ

752. Różne typy granic występujących w analizie.	535
753. Zbiory uporządkowane (w zwykłym znaczeniu).	536
754. Zbiory uporządkowane (w znaczeniu uogólnionym).	537
755. Zmienna uporządkowana i jej granica.	539
756. Przykłady.	540
757. Uwaga o granicy funkcji.	542
758. Rozszerzenie teorii granic.	543
759. Zmienne jednakowo uporządkowane.	545
760. Uporządkowanie przy pomocy parametru liczbowego.	546
761. Sprowadzenie do zmiennej.	548
762. Granica górna i dolna zmiennej uporządkowanej.	549
Skorowidz	552