

Spis treści

O autorach	11
O recenzencie	12
Wprowadzenie	13
Część I. Podstawowe pojęcia z obszaru matematyki dyskretnej	17
Rozdział 1. Podstawowe pojęcia, notacja, teoria mnogości, relacje i funkcje	19
Czym jest matematyka dyskretna?	19
Podstawowa teoria mnogości	22
Definicja — zbiory i ich notacja	22
Definicja — elementy zbiorów	22
Definicja — zbiór pusty	22
Przykład — kilka przykładowych zbiorów	22
Definicja — podzbiory i nadzbiory	23
Definicja — notacja konstrukcji zbiorów	23
Przykład — użycie notacji konstrukcji zbiorów	23
Definicja — podstawowe operacje na zbiorach	24
Definicja — zbiory rozłączne	26
Przykład — liczby parzyste i nieparzyste	26
Twierdzenie — prawa De Morgana	26
Przykład — prawo De Morgana	27
Definicja — moc zbioru	27
Przykład — moce zbiorów	28
Funkcje i relacje	28
Definicja — relacje, dziedziny i przeciwdziedziny	28
Definicja — funkcje	28
Przykłady — relacje kontra funkcje	29

Spis treści

Przykład — funkcje w algebrze elementarnej	29
Przykład — funkcje w Pythonie i funkcje matematyczne	30
Podsumowanie	31
Rozdział 2. Logika formalna i dowody matematyczne	33
Logika formalna i dowodzenie za pomocą tablic prawdy	34
Podstawy terminologii stosowanej w logice formalnej	34
Przykład — niepoprawny argument	35
Przykład — wszystkie pingwiny mieszkają w RPA!	36
Podstawowe idee logiki formalnej	37
Tablice prawdy	38
Przykład — implikacja odwrotna	40
Przykład — prawo przechodniości implikacji	40
Przykład — prawa De Morgana	41
Przykład — implikacja przeciwna	42
Dowody wprost	43
Przykład — iloczyn parzystych i nieparzystych liczb całkowitych	44
Przykład — pierwiastki liczb parzystych	45
Skrócenie dowodu za pomocą implikacji przeciwna	46
Dowody nie wprost	46
Przykład — czy istnieje najmniejsza dodatnia liczba wymierna?	48
Przykład — dowód, że 2 jest liczbą niewymierną	48
Przykład — ile jest liczb pierwszych?	49
Dowodzenie przez indukcję matematyczną	51
Przykład — suma $1+2+\dots+n$	51
Przykład — kształty wypełniające przestrzeń	53
Przykład — wzrost wykładniczy a wzrost w tempie silni	54
Podsumowanie	56
Rozdział 3. Obliczenia w systemach o podstawie n	57
Zrozumieć liczby o podstawie n	58
Przykład — liczby dziesiętne	58
Definicja — liczby o podstawie n	59
Konwersje między różnymi podstawami	59
Konwersja liczb o podstawie n na liczby dziesiętne	59
Przykład — wartość dziesiętna liczby o podstawie 6	60
Konwersja z zapisu dziesiętnego na system o podstawie n	60
Przykład — konwersja liczby dziesiętnej na liczbę binarną (podstawa 2)	60
Przykład — konwersje z systemu dziesiętnego na binarny i szesnastkowy w Pythonie	61
Liczby binarne i ich zastosowania	62
Algebra Boole'a	63
Przykład — użytkownicy Netflixa	67
Liczby szesnastkowe i ich zastosowanie	69
Przykład — położenie obiektów w pamięci komputera	70
Przykład — wyświetlanie komunikatów o błędach	71
Przykład — adresy MAC	71
Przykład — kolory w sieci	72
Podsumowanie	73

Rozdział 4. Kombinatoryka z użyciem SciPy	74
Podstawy zliczania	75
Definicja — iloczyn kartezjański	75
Twierdzenie — moc iloczynów kartezjańskich zbiorów skończonych	75
Definicja — iloczyn kartezjański n zbiorów	76
Twierdzenie — reguła mnożenia	76
Przykład — bajty	76
Przykład — kolory w komputerze	77
Permutacje i kombinacje obiektów	77
Definicja — permutacja	77
Przykład — permutacje prostego zbioru	77
Twierdzenie — permutacje zbioru	78
Przykład — playlista	78
Wzrost w tempie silni	78
Twierdzenie — wariacja bez powtórzeń	79
Definicja — kombinacja	80
Przykład — kombinacje kontra permutacje prostego zbioru	80
Twierdzenie — kombinacje ze zbioru	80
Współczynniki dwumianowe	80
Przykład — tworzenie zespołu	81
Przykład — kombinacje kul	81
Alokacja pamięci	82
Przykład — wstępne przydzielanie pamięci	82
Skuteczność algorytmów siłowych	84
Przykład — szyfr Cezara	84
Przykład — problem komiwojażera	87
Podsumowanie	89
Rozdział 5. Elementy prawdopodobieństwa dyskretnego	90
Definicja — doświadczenie losowe	91
Definicje — zdarzenia elementarne, zdarzenia losowe, przestrzenie prób	91
Przykład — rzut monetą	91
Przykład — rzut wieloma monetami	92
Definicja — miara probabilistyczna	92
Twierdzenie — podstawowe własności prawdopodobieństwa	93
Przykład — sport	94
Twierdzenie — monotoniczność	95
Twierdzenie — zasada włączeń i wyłączeń	95
Definicja — rozkład jednostajny	96
Twierdzenie — obliczanie prawdopodobieństwa	96
Przykład — rzut wieloma monetami	97
Definicja — zdarzenia niezależne	98
Przykład — rzucanie wieloma monetami	98
Prawdopodobieństwo warunkowe i twierdzenie Bayesa	99
Definicja — prawdopodobieństwo warunkowe	100
Przykład — temperatury i opady	100
Twierdzenie — reguły mnożenia	101
Twierdzenie — twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym	102
Twierdzenie — twierdzenie Bayesa	102

Spis treści

Bayesowski filtr antyspamowy	103
Zmienne losowe, średnie i wariancja	104
Definicja — zmienna losowa	104
Przykład — błędy przesyłania danych	104
Przykład — empiryczna zmienna losowa	105
Definicja — wartość oczekiwana	105
Przykład — empiryczna zmienna losowa	106
Definicja — wariancja i odchylenie standardowe	106
Twierdzenie — obliczanie wariancji w praktyce	106
Przykład — empiryczna zmienna losowa	107
Google PageRank (część I)	107
Podsumowanie	110

Część II. Zastosowania matematyki dyskretnej w analizie danych i informatyce 111

Rozdział 6. Algorytmy algebry liniowej	113
Zrozumieć układy równań liniowych	114
Definicja — równanie liniowe dwóch zmiennych	114
Definicja — kartezjański układ współrzędnych	114
Przykład — równanie liniowe	115
Definicja — układ dwóch równań liniowych dwóch zmiennych	116
Przykład — układ oznaczony	116
Przykład — układ sprzeczny	117
Przykład — układ nieoznaczony	119
Definicja — układy równań liniowych i ich rozwiązania	120
Definicja — układy oznaczone, sprzeczne i nieoznaczone	121
Macierze i macierzowe reprezentacje układów równań liniowych	121
Definicja — macierze i wektory	122
Definicja — dodawanie i odejmowanie macierzy	123
Definicja — mnożenie przez skalar	124
Definicja — transpozycja macierzy	125
Definicja — iloczyn skalarny wektorów	126
Definicja — mnożenie macierzy	126
Przykład — ręczne mnożenie macierzy i mnożenie macierzy w NumPy	127
Rozwiązywanie małych układów równań liniowych za pomocą metody eliminacji Gaussa	129
Definicja — współczynnik wiodący	129
Definicja — zredukowana macierz schodkowa	130
Przykład — układ oznaczony z macierzą schodkową	130
Przykład — układ sprzeczny z macierzą schodkową	130
Przykład — układ nieoznaczony z macierzą schodkową	131
Algorytm — eliminacja Gaussa	131
Przykład — układ 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi	132
Rozwiązywanie dużych układów równań liniowych za pomocą NumPy	134
Przykład — układ 3 równań z 3 niewiadomymi (NumPy)	134
Przykład — sprzeczne i nieoznaczone układy równań w NumPy	135
Przykład — układ 10 równań z 10 niewiadomymi (NumPy)	136
Podsumowanie	138

Rozdział 7. Złożoność algorytmów	139
Złożoność obliczeniowa algorytmów	139
Notacja dużego O	143
Kiedy stałe mają znaczenie?	147
Złożoność algorytmów zawierających podstawowe instrukcje sterujące	149
Przeptyw sekwencyjny	149
Przeptyw warunkowy	150
Pętla	151
Złożoność popularnych algorytmów wyszukiwania	155
Algorytm wyszukiwania liniowego	155
Algorytm wyszukiwania binarnego	156
Popularne klasy złożoności obliczeniowej	159
Podsumowanie	161
Bibliografia	161
Rozdział 8. Przechowywanie i wyodrębnianie cech z grafów, drzew i sieci	162
Zrozumieć grafy, drzewa i sieci	162
Definicja — graf	163
Definicja — stopień wierzchołka	163
Definicja — ścieżki	164
Definicja — cykle	165
Definicja — drzewa lub grafy acykliczne	165
Definicja — sieci	166
Definicja — grafy skierowane	167
Definicja — sieci skierowane	168
Definicja — wierzchołki sąsiednie	169
Definicja — grafy i składowe spójne	169
Zastosowania grafów, drzew i sieci	171
Przechowywanie grafów i sieci	173
Definicja — lista sąsiedztwa	173
Definicja — macierz sąsiedztwa	173
Definicja — macierz sąsiedztwa dla grafu skierowanego	175
Wydajne przechowywanie danych sąsiedztwa	178
Definicja — macierz wag sieci	178
Definicja — macierz wag sieci skierowanej	179
Wyodrębnianie cech z grafów	181
Stopnie wierzchołków w grafie	181
Liczba ścieżek o określonej długości między wierzchołkami	182
Twierdzenie — potęgi macierzy sąsiedztwa	183
Potęgi macierzy w Pythonie	183
Twierdzenie — najkrótsza (pod względem liczby krawędzi) ścieżka pomiędzy v , i v ,	184
Podsumowanie	186
Rozdział 9. Przeszukiwanie struktur danych i znajdowanie najkrótszych ścieżek	187
Przeszukiwanie struktur grafowych i drzew	188
Algorytm przeszukiwania w głąb (DFS)	188
Implementacja algorytmu przeszukiwania w głąb w Pythonie	191

Problem najkrótszej ścieżki i jego warianty	193
Najkrótsze ścieżki w sieciach	194
Inne zastosowania najkrótszych ścieżek	194
Definicja problemu najkrótszej ścieżki	195
Sprawdzenie, czy istnieje rozwiązanie	196
Znajdowanie najkrótszych ścieżek metodą siłową	198
Algorytm Dijkstry znajdowania najkrótszych ścieżek	201
Algorytm Dijkstry	201
Algorytm Dijkstry zastosowany do małego problemu	202
Implementacja algorytmu Dijkstry w Pythonie	207
Przykład — najkrótsze ścieżki	209
Przykład — sieć bez połączenia	211
Podsumowanie	213
 Część III. Praktyczne zastosowania matematyki dyskretnej	 215
 Rozdział 10. Analiza regresji za pomocą NumPy i scikit-learn	 217
Zbiór danych	218
Linie najlepszego dopasowania i metoda najmniejszych kwadratów	220
Zmienne	220
Zależność liniowa	220
Regresja	220
Linia najlepszego dopasowania	221
Metoda najmniejszych kwadratów i suma kwadratów błędów	224
Dopasowywanie prostej metodą najmniejszych kwadratów w NumPy	226
Dopasowywanie krzywych metodą najmniejszych kwadratów z użyciem NumPy i SciPy	229
Dopasowanie płaszczyzn metodą najmniejszych kwadratów z użyciem NumPy i SciPy	232
Podsumowanie	234
 Rozdział 11. Wyszukiwanie w sieci za pomocą algorytmu PageRank	 236
Rozwój wyszukiwarek na przestrzeni lat	237
Google PageRank (część II)	238
Implementacja algorytmu PageRank w Pythonie	245
Zastosowanie algorytmu na danych rzeczywistych	249
Podsumowanie	253
 Rozdział 12. Analiza głównych składowych za pomocą scikit-learn	 254
Wartości i wektory własne, bazy ortogonalne	255
Redukcja wymiarowości za pomocą analizy głównych składowych	260
Implementacja metody PCA z scikit-learn	264
Zastosowanie metody PCA na rzeczywistych danych	267
Podsumowanie	270